17/12/15

Έστω V δ.χ./$\mathbb{F}$ και W υπόχωρος.
Α' ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Δίδονται $v_1 \dots v_p \in V$ με $W = \langle v_1 \dots v_p \rangle$. Τότε W το σύνολο γραμ. συνδυασμών $v_1 \dots v_p$
Β' ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Το W δίδεται σαν λύση ομογενούς συστήματος γραμμικών εξισώσεων.

Άσκηση: Έστω $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ και W ο υπόχωρος
$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ 4x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0,\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 11x_4 = 0 \right\}$
Βρείτε μια βάση του W.

ΛΥΣΗ:
Θεωρούμε το σύστημα
$$4x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$
$$3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 11x_4 = 0$$

και θέτουμε $\begin{bmatrix} 4 & 12 & -7 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & -2 & 11 & 0 \end{bmatrix}$ τον επαυξημένο πίνακα

του συστήματος. Κάνουμε γραμμοπράξεις στον A (μέθοδος απαλοιφής Gauss) για να καταλήξουμε σε γραμμοϊσοδύναμο ισχυρά κλιμακωτό πίνακα)

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \dots \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - 4r_1} \dots \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 4r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 + 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Ισχυρά Κλιμακωτός

Επομένως το (Σ) είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 5x_4 = 0$

$x_3 + 2x_4 = 0$

Επομένως $W = \left\{ \begin{bmatrix} -3x_2 - 5x_4 & x_2 \\ -2x_4 & x_4 \end{bmatrix} x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ x_2 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \middle| x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\langle \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Είναι τα v_1, v_2 γραμμ. ανεξάρτητα;

Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_V = 0_{2\times 2}$

Τότε $\begin{cases} -3\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ -2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Άρα v_1, v_2 γραμμ. ανεξάρτητα $\Rightarrow v_1, v_2$ βάση του W και άρα $\dim W = 2$

Στον $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τους υπόχωρους του

$V = \langle v_1(1,2,1), v_2(2,2,-2), v_3(1,3,3) \rangle$

$W = \langle v_4(1,2,2), v_5(2,2,-6), v_6 = (2,3,-1) \rangle$

Να προσδιορισθούν βάσεις και διαστάσεις των υπόχωρων $V, W, V+W, V \cap W$

Ισχύει ότι $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$;

Λυση

Εστω $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

ΕΥΡΕΣΗ ΒΑΣΗΣ V

Έχουμε $v_1=1e_1+2e_2+3e_3$

$v_2=2e_1+2e_2-2e_3$

$v_3=1e_1+3e_2+3e_3$

Θέτουμε $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&-2\\1&3&3\end{bmatrix}$

Γραμμοπράξεις $A \xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1} \ldots \xrightarrow{r_3\to r_3-r_1} \begin{bmatrix}1&2&1\\0&-2&4\\0&1&2\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \ldots \xrightarrow{r_3\to r_3+2r_2} \begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$ ← Κλιμακωτός

Επομένως από τη θεωρία μια βάση του V είναι $f_1=1e_1+2e_2+e_3=(1,2,1)$ και $f_2=e_2+2e_3=(0,1,2)$

Συνεπώς $\dim V=2$

ΕΥΡΕΣΗΣ ΒΑΣΗΣ W

Έχουμε $v_4=1e_1+2e_2+3e_3$

$v_5=2e_1+2e_2-6e_3$

$v_6=2e_1+3e_2-e_3$

Δουλεύουμε όπως για το V. Βρίσκουμε ότι ο W έχει βάση $g_1=e_1+2e_2+2e_3=(1,2,2)$

$g_2=e_2+5e_3=(0,1,5)$

και άρα $\dim W=2$

ΕΥΡΕΣΗ V+W

Από υπόθεση $V=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$, $W=\langle v_4,v_5,v_6\rangle$

Άρα $V+W=\langle v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\rangle$. Δουλεύοντας όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι μια βάση V+W είναι η $\rho_1=(1,2,1)$, $\rho_2=(0,1,2)$, $\rho_3=(0,0,1)$. Άρα $\dim W+V=3$

Παρατήρηση:
(Αφού $\dim(V+W)=3=\mathbb{R}^3 \Rightarrow V+W=\mathbb{R}^3$ και ρ_1,ρ_2,ρ_3 βάση του $\mathbb{R}^3$)

Υπολογισμός $\dim V\cap W$. Από θεωρία

$\dim V+\dim W-\dim(V+W)=2+2-3=1$

Συμπέρασμα: $V\cap W\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (1)

Έχουμε δείξει $\mathbb{R}^3=V+W$ αλλά από (1) $V\cap W\neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Άρα <u>δεν ισχύει $\mathbb{R}^3=V\oplus W$</u>

ΕΥΡΕΣΗ ΒΑΣΗΣ V∩W

Ξέρουμε $V=\langle f_1,f_2\rangle$, $W=\langle g_1,g_2\rangle$

Έστω $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$ με $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=\mu_1 g_1+\mu_2 g_2$

$\Leftrightarrow \lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2-\mu_1 g_1-\mu_2 g_2=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow$ ομογενές σύστημα $\begin{cases} \lambda_1-\mu_1=0 \\ 2\lambda_1+\lambda_2-2\mu_1-\mu_2=0 \\ \lambda_1+2\lambda_2-2\mu_1-5\mu_2=0 \end{cases}$ (Σ)

Επαυξημένος πίνακας του (Σ) $B=(\dots)$

$$B \xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως το (Σ) είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\mu_2 = 0 \\ \lambda_2 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1 + 3\mu_2 = 0 \end{cases}$$ με σύνολο λύσεων $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\mu_2 \\ \mu_2 \\ -3\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Επομένως μια βάση του υπόχωρου λύσεων του (Σ) είναι η $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Άρα κρατάμε μόνο τα λ_1, λ_2

Έχουμε $V \cap W = \langle (-3)f_1 + f_2 \rangle = \langle (-3,-5,-1) \rangle$ και άρα το $(-3,-5,-1)$ είναι βάση του $V \cap W$.

Φροντ. ασκήσεις #5

5) Λύση

Ξέρουμε $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3$ βάση του $\mathbb{R}_3[X]$

Έστω $f(x) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$

$f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$

Για τον V

$f(x) \in V \iff a_1 = 0$. Επομένως $V = \{a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 : a_i \in \mathbb{R}\} = \langle x, x^2, x^3 \rangle$. Είναι τα x, x^2, x^3 γραμμικά ανεξάρτητα; Έχουμε $\lambda_1x + \lambda_2x^2 + \lambda_3x^3 =$ μηδενικό πολυώνυμο $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Επομένως x, x^2, x^3 γραμμ. ανεξ. άρα βάση του V.

ΕΥΘΥ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΤΟΥ V ΣΤΟ R3[x]

Έχουμε $x = 0 \cdot e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4$

$x^2 = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 0e_4$

$x^3 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4$

Θέτουμε $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Έχουμε A κλιμακωτός και οι στήλες του A στις οποίες δεν εμφανίζεται αρχική μονάδα κάποιας γραμμής είναι ΜΟΝΟ η 1η

Άρα το $\langle e_1 \rangle = \langle 1 \rangle = \{\alpha 0 : \alpha 0 \in \mathbb{R}\}$ είναι ένα ευθύ συμπλήρωμα του V στο R3[x]

ΕΥΡΕΣΗ ΒΑΣΗΣ (ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥ T)

Έχουμε $f(x) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$

$f(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$

ότι $f(-x) = \alpha_1 + \alpha_2(-x) + \alpha_3(-x^2) + \alpha_4(-x^3)$

$f(-x) = \alpha_1 + (\alpha_2)x + \alpha_3 x^2 + (-\alpha_4) \cdot x^3$

Άρα $f(x) \in T \iff \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = \alpha_1 + (-\alpha_2)x + \alpha_3 x^2 + (-\alpha_4)x^3$

$\iff \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_2 \\ \alpha_3 = \alpha_3 \\ \alpha_4 = \alpha_4 \end{cases}$

$\iff \alpha_2 = \alpha_4 = 0$

Άρα $T=\{\alpha_1+\alpha_2x^2 : \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\} = \langle 1,x^2\rangle = \langle e_1,e_3\rangle$
Τα e_1,e_3 γραμ. ανεξ. γιατί $\lambda_1e_1+\lambda_2e_3=0 \iff$
$\lambda_1+\lambda_2x^2=$ μηδεν. πολυώνυμο $\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$

Άρα e_1,e_3 βάση του T και $\dim T=2$

Επεκτείνουμε την βάση e_1,e_3 του T συνάρτηση της βάσης e_1,e_2,e_3,e_4 του $\mathbb{R}_3[x]$ και παίρνουμε τον πίνακα $D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$ που είναι κλιμακωτός

Οι στήλες του D στις οποίες $\underline{\text{Δεν}}$ εμφανίζεται αρχική μονάδα κάποιας γραμμής του D είναι οι 2,4. Άρα από θεωρία, ο υπόχωρος $\langle e_2,e_4\rangle = \langle x,x^3\rangle =$
$\{\alpha_1x+\alpha_3x^3 : \alpha_1,\alpha_3 x^3 : \alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{R}\}$ είναι ένα ευθύ συμπλήρωμα του T στο $\mathbb{R}_3[x]$.